Integration ISSN: 2992-9210

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ КОШИ-РИМАНА С КВАТЕРНИОННЫМ ПАРАМЕТРОМ

Сатторов Э.Н., Рустамов С.У.

Annotatsiya

Ushbu ishda kvaternion parametrli umumlashgan Koshi-Riman tenglamalar sistemasi yechimini uch oʻlchamli fazodan olingan soha chegarasining bir qismida berilgan qiymati boʻyicha shu sohaga davom ettirish masalasi oʻrganilgan.

Kalit soʻzlar: *umumlashgan Koshi-Riman sistemasi, Koshi masalasi, nokorrekt masala, Tixonovning regulyarlashtirish metodi.*

Аннотация

В данной работе изучается задача продолжения решение обобщенной системы Коши-Римана с кватернионным параметром по заданным значениям на части границы данной области в трехмерном пространстве.

Ключевые слова: *обобщенная система Коши-Римана, задача Коши, нокорректная задача, метод регуляризации по Тихонову.*

Abstract

In this work, the task of continuing the solution of the generalized Cauchy-Rimann system with a quaternionic parameter according to the specified values on parts of the boundary of this domain in the three-dimensional space.

Keywords: *generalized Cauchy-Rimann system, problem Cauchy, ill-posed problem, Tikhonov regularization method.*

Введение

Рассматривается задача аналитического продолжения решения системы уравнений, которая является обобщением [1]-[3] системой Моисила-Теодореску, трехмерным аналогом уравнений Коши-Римана, важность которых в физических приложениях привела к далеко идущем обобщениям [4]-[6].

Метод указанных результатов основан на конструкции в виде фундаментального решения оператора D_α, зависящего от положительного параметра, исчезающего при стремлении параметра к бесконечности на T, когда полюс фундаментального решения лежит в полупространстве $y_3 > 0$. Следуя М.М.Лаврентьеву и Ш.Ярмухамедову матрицу фундаментальных решений с указанным свойством назовем матрицей Карлемана для полупространства [7], [8]. После построения матрицы Карлемана в явном виде формула продолжения, а также регуляризация решения задачи Коши выписываются в виде обобщенной пространственной интегральной формулы Коши.

Пусть R^3-вещественное трехмерное евклидово пространство,

Integration ISSN: 2992-9210

$x=(x_1,\,x_2,\,x_3),\;\; y=(y_1,\,y_2,\,y_3)\in R^3,\, x'=(x_1,\,x_2,\,0),\;\; y'=(y_1,\,y_2,\,0)\in R^2,$
$s=(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2,\;\; r^2=|y-x|=s+(y_3-x_3)^2$, Ω - ограниченная односвязная область в R^3 с границей $\partial\Omega$ состоящей из компактной связной части Т плоскости $y_3=0$ и гладкого куска поверхности S Ляпунова, лежащей в полупространстве $y_3\ge 0$, $\overline{\Omega}=\Omega\bigcup\partial\Omega$, $\partial\Omega=S\bigcup T$. Относительно S будем предполагать, что каждый луч, выходящий из любой точки x области Ω, пересекает эту поверхность самое большее в l точках. $A(\Omega)$ - совокупность вектор-функций класса $C^1(\Omega)$ удовлетворяющих обобщенной системы Коши-Римана в Ω.

Постановка задачи и конструкция матрицы Карлемана

Рассмотрим систему уравнений [9]

$$\alpha_0 f_0-divf-<f,\vec{\alpha}>=0,\;\; grad\,f_0+rotf+[f\times\vec{\alpha}]+f_0\vec{\alpha}+\alpha_0 f=0 \tag{1}$$

где $\vec{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $\alpha_k\in C$, $k=0,1,2,3$; $f=(f_1,f_2,f_3)$, f_0- векторная и скалярная функции соответственно.

Пусть Q-множество комплексных кватернионов, т.е. если $\alpha\in Q$, то $\alpha=\sum_{k=0}^{3}\alpha_k\,i_k$, где i_k, $k=0,1,2,3$ - базисные кватернионные векторы, $\alpha_k\in C$, $k=0,1,2,3$. По определению, для i- мнимой единицы из C - выполняются соотношения $ii_k=i_k i$, $k=0,1,2,3$. Обозначим $\hat{\alpha}:=\sum_{k=1}^{3}\alpha_k\,i_k$, $\overline{\alpha}:=\alpha_0-\hat{\alpha}$, через $\Re$ подмножество Q делителей нуля. Через Θ обозначим подмножество Q делителей нуля.

На кватернионнозначных функциях вида $F(x)=\sum_{k=0}^{3}f_k(x)i_k$, $x\in\Omega\subset R^3$, $k=0,1,2,3$ определим оператор $D_\alpha F:=(D+M^\alpha)F$, где $D:=\sum_{k=1}^{3}i_k\dfrac{\partial}{\partial x_k}$- оператор, обобщающий двумерный оператор Коши-Римана (см. например [3]); $M^\alpha F:=F\alpha$. Тогда уравнение $D_\alpha F=0$ является эквивалентной записью системы (1). Обозначим через $A(\Omega)$ совокупность функций, решений оператора D_α в Ω и непрерывных на $\overline{\Omega}=\Omega\bigcup\partial\Omega$.

Постановка задачи. Требуется определить регулярное решение $F(y)$ системы (1) в области Ω, исходя из ее данных Коши, заданных на поверхности S:

$$F(y)\big|_S=g(y),\;\; y\in S \tag{2}$$

где $g(y)=\sum_{k=0}^{3} g_k(y) i_k$ - заданная непрерывная кватернионнозначная функция.

Пусть вместо $g(y)$ заданы ее приближения $g_\delta(y)$ с точностью $\delta \in (0,1)$ (в метрике C). В данной работе строится семейство вектор-функций $F(x,g_\delta)=F_{\sigma\delta}$, зависящее от параметра σ, и доказывается, что при некоторых условиях и специальном выборе параметра $\sigma(\delta)$ при $\delta \to 0$ семейство $F_{\sigma\delta}(x)$ сходится в обычном смысле к решению задачи (1), (2).

Следуя [10], функцию $F_{\sigma\delta}(x)$ назовем регуляризованным решением задачи Коши для обобщенной системы Коши-Римана. Регуляризованное решение определяет устойчивость метода приближенного решения задачи.

С использованием результатов работы [7], [8], [11], [12] по задаче Коши для уравнений Лапласа и Гельмгольца в данной статье построена матрица Карлемана в явном виде и на ее основе – регуляризованное решение задачи Коши для системы (1). В [13] приведены теоремы существования матрицы Карлемана и критерий разрешимости более широкого класса краевых задач для эллиптических систем. Ранее в [13], [14] было доказано, что матрица Карлемана существует во всякой задаче Коши для решений эллиптических систем, если только данные Коши задаются на граничном множестве положительной меры. Поскольку в данной статье речь идет о явных формулах, то построение матрицы Карлемана в элементарных и специальных функциях представляет значительный интерес.

Функция Карлемана задачи Коши для уравнения Лапласа и близких к ней случаях, когда $\partial D \setminus S$ - часть поверхности конуса, построена в [8]. Матрицу Карлемана для уравнения Коши-Римана в случае, когда S - произвольное множество положительной меры, построил Л.А.Айзенберг [14]. Развивая идею С.Е.Мергеляна [15], указавшего способ построения функции Карлемана в задаче Коши для уравнения Лапласа в случае, когда S - кусок с гладким краем границы односвязной области, на основе теорем об аппроксимации в [13] построена матрица Карлемана для эллиптических систем.

Когда $\alpha := (\alpha_0, \vec{\alpha}) = 0$ система (1) является хорошо известной [1] системой Моисила-Теодореску, для которой в [16], [17] получена формула аналитического продолжения голоморфного вектора по ее значениям на куске границы и аналог теоремы Фока-Куни. При $\alpha_0 = 0$, $\alpha_k \in R$, $k = 1, 2, 3$ задача аналитического продолжения обобщенно голоморфного вектора изучена в работе [18]–[19] и для однородной системы уравнений Максвелла изучена в работе [20]–[21]. В этой работе приводим аналогичную формулу для оператора D_α.

Когда $\alpha \in C$, т.е. $\alpha \equiv \alpha_0$, фундаментальное решение G_α оператора D_α может быть найдено по формуле (ср. [3] с. 76)

$$G_\alpha(x) = -[D_{-\alpha}\, h_\alpha](x) = h_\alpha(\alpha - x|x|^{-2} + i\alpha\, x|x|^{-1}), \tag{3}$$

где $h_\alpha(x) := -(4\pi|x|)^{-1} e^{-i\alpha|x|}$ - фундаментальное решение оператора Гельмгольца $\Delta + \alpha^2 I$ (см. например, [22]).

Обозначим $P^+F := (2\gamma)^{-1} F(\gamma + \hat{\alpha})$, $P^-F := (2\gamma)^{-1} F(\gamma - \hat{\alpha})$.

Тогда справедливо следующее непосредственно проверяемое равенство:

$$D_\alpha F = D_\xi P^+ F + D_\varsigma P^- F \tag{4}$$

где $\xi = \alpha_0 + \gamma$, $\varsigma = \alpha_0 - \gamma$, $\gamma \in C$, $\gamma^2 = \hat{\alpha}^2$.

Заметим, что операторы P^+ и P^- являются взаимно дополнительными проекторами, коммитирующими с операторами D_ξ и D_ς.

Определение 1. Функция

$$G_\alpha := \begin{cases} P^+ G_\xi + P^- G_\varsigma; & \alpha \notin \Re \text{ и } \hat{\alpha}^2 \neq 0, \\ G_{\alpha_0} + \dfrac{\partial}{\partial \alpha_0}[G_{\alpha_0}]\hat{\alpha}, & \alpha \notin \Re \text{ и } \hat{\alpha} = 0, \\ P^+ G_{2\alpha_0} + P^- G_0, & \alpha \in \Re \text{ и } \alpha_0 \neq 0, \\ G_{\alpha_0} + h_0 \alpha, & \alpha \in \Re \text{ и } \alpha_0 = 0. \end{cases} \tag{5}$$

является фундаментальным решением оператора D_α.

Следуя [8], приведем

Определение 2. Функцией Карлемана задачи (1), (2) называется функция K_α^σ, удовлетворяющая следующим двум условиям:

1) $K_\alpha^\sigma(x,y) = G_\alpha(x,y) + N_\alpha^\sigma(x,y)$,

где σ - положительный числовой параметр, функция $N_\alpha^\sigma(x,y)$ по переменной y удовлетворяет системе (1) всюду в области Ω, $G_\alpha(x,y)$ - функция фундаментальных решений оператора D_α;

2) $\int_T |K_\alpha^\sigma| dS_y \leq \varepsilon(\sigma)$ при фиксированном $x \in \Omega$, где $\varepsilon(\sigma) \to 0$ при $\sigma \to \infty$; здесь и далее $|K_\alpha^\sigma|$ означает евклидову норму.

Поскольку функция Карлемана отличается от функции фундаментальных решений на решение транспонированной системы, то интегральная формула Коши остается справедливой, если в ней заменить фундаментальное решение на функции Карлемана.

С целью построения приближенного решения задачи (1), (2) рассмотрим четыре случая:

1) $\alpha \notin \Re$ и $\hat{\alpha}^2 \neq 0$

$$K_\alpha := P^+ K_\xi + P^- K_\varsigma = -\frac{(\gamma + \hat{\alpha})}{2\gamma}\left[D_{-\xi}\Phi_\xi\right](x) - \frac{(\gamma - \hat{\alpha})}{2\gamma}\left[D_{-\varsigma}\Phi_\varsigma\right](x) \tag{6}$$

$$\Phi_\xi(x) = -\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty \operatorname{Im}\left[\frac{K(i\sqrt{u^2+s}+y_3)}{i\sqrt{u^2+s}+y_3-x_3}\right]\frac{ch(\gamma+\hat{\alpha})u}{\sqrt{u^2+s}}\,du, \tag{7}$$

$$D_{-\xi}\Phi_\xi(x) = (D\Phi_\xi + \Phi_\xi \cdot \xi) = \sum_{k=1}^{3} i_k \frac{\partial \Phi_\xi}{\partial x_k} + \Phi_\xi \cdot \xi, \tag{8}$$

$K(w)$-целая функция комплексного переменного, вещественная при вещественном w, $w = u + iv$, где u, v-действительные числа, и $K(0) \neq 0$, для всех $R > 0$ существует $C_R > 0$

$$\sup_{|\operatorname{Re} w|<R,\ \operatorname{Im} w \le -C_R} (|K(w)| + |\operatorname{Im} w||K'(w)| + |\operatorname{Im} w|^2 |K''(w)|) < \infty. \tag{9}$$

При вещественном w из вещественности $K(w)$ имеем $\overline{K(\overline{w})} = K(w)$. Тогда из (9) следует, что для всех $R > 0$

$$\sup_{|\operatorname{Re} w|<R} \left\{|K(w)| + (1+|\operatorname{Im} w|)|K'(w)| + (1+|\operatorname{Im} w|^2)|K''(w)|\right\} < \infty. \tag{10}$$

Так как

$$\operatorname{Im}\left(\frac{K(w)}{w}\right) = \frac{1}{2i}\left\{\frac{K(w)}{w} - \frac{K(\overline{w})}{\overline{w}}\right\} = \frac{\overline{w}K(w) - wK(\overline{w})}{2i(r^2+u^2)} =$$

$$= \frac{(y_3 - x_3)\operatorname{Im} K(w) - \sqrt{s+u^2}\,K(w)}{r^2+u^2},$$

то (7) имеет вид

$$-2\pi^2 K(0)\Phi(x,y;k) = \int_0^\infty \left\{\frac{(y_3-x_3)\operatorname{Im} K(w)}{\sqrt{s+u^2}} - \operatorname{Re} K(w)\right\}\frac{ch(ku)}{r^2+u^2}\,du. \tag{11}$$

В силу того, что

$$K(y_3 - x_3 + i\sqrt{s+u^2}) - K(y_3 - x_3 - i\sqrt{s+u^2}) = K(y_3 - x_3 + it\sqrt{s+u^2})\Big|_{t=-1}^{t-1} =$$

$$= i\sqrt{s+u^2}\int_{-1}^{1} K'(y_3 - x_3 + it\sqrt{s+u^2})\,dt,$$

из (9) и (10) следует, что при $y \neq x$ интеграл в (4) абсолютно сходится.

Если $K(w) \equiv 1$, то функция $\Phi(x,y;k)$ является классическим фундаментальным решением уравнения Гельмгольца, то есть

$$\Phi(x,y;k) \equiv \Phi_0(r;k) = \frac{1}{4\pi r}e^{-ikr}.$$

Можно показать, что

$$\frac{e^{-ikr}}{4\pi r}=\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\infty}\frac{ch(ku)}{r^2+u^2}du\,,$$

где $\quad r^2+u^2=(y_3-x_3+i\sqrt{s+u^2})\,(y_3-x_3-i\sqrt{s+u^2})$, откуда

$$\frac{1}{r^2+u^2}=-\frac{1}{2i\sqrt{s+u^2}}\left(\frac{1}{(y_3-x_3+i\sqrt{s+u^2})}-\frac{1}{(y_3-x_3-i\sqrt{s+u^2})}\right)=$$

$$=-\operatorname{Im}\left(\frac{1}{(y_3-x_3+i\sqrt{s+u^2})}\right)\frac{1}{\sqrt{s+u^2}}\,.$$

2) $\alpha\notin\Re$ и $\hat{\alpha}^{2}=0$. Проверим, что $K_\alpha := K_{\alpha_0}+\dfrac{\partial}{\partial\alpha_0}\left[K_{\alpha_0}\right]\hat{\alpha}$ есть фундаментальное решение оператора D_α.

$$(K_\alpha F)(x):=-\int_\Gamma K_{\alpha_0}(x-t)n(t)F(t)d\Gamma_t-\int_\Gamma\frac{\partial}{\partial\alpha_0}\left[K_{\alpha_0}\right]\hat{\alpha}\,n(t)F(t)d\Gamma_t=$$

$$=\int_\Gamma\left[D_{-\alpha_0}\Phi_{\alpha_0}\right](x-t)\,n(t)F(t)d\Gamma_t-\int_\Gamma\frac{\partial}{\partial\alpha_0}\left[D_{-\alpha_0}\Phi_{\alpha_0}\right](x-t)\,n(t)F(t)d\Gamma_t$$

$$D_{-\alpha_0}\Phi_{\alpha_0}(x)=\left(D\Phi_{\alpha_0}-\Phi_{\alpha_0}\cdot\alpha_0\right)=\sum_{k=1}^{3}i_k\frac{\partial\Phi_{\alpha_0}}{\partial x_k}+\Phi_{\alpha_0}\cdot\alpha_0\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_0}\left[D_{-\alpha_0}\Phi_{\alpha_0}\right]=\frac{\partial}{\partial\alpha_0}\left(D\Phi_{\alpha_0}-\Phi_{\alpha_0}\cdot\alpha_0\right)=\frac{\partial}{\partial\alpha_0}\left(\sum_{k=1}^{3}i_k\frac{\partial\Phi_{\alpha_0}}{\partial x_k}\right)-\frac{\partial}{\partial\alpha_0}\left(\Phi_{\alpha_0}\cdot\alpha_0\right),$$

$$\Phi_{\alpha_0}(x-y)=-\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\infty}\operatorname{Im}\left[\frac{K(i\sqrt{u^2+s}+y_3)}{i\sqrt{u^2+s}+y_3-x_3}\right]\frac{ch(\alpha_0 u)u}{\sqrt{u^2+s}}du\,.$$

3) $\alpha\in\Re$ и $\alpha_0\neq 0$. Заметим, что в этом случае $\alpha_0^2=\hat{\alpha}^{2}$, $P^+F=(2\alpha_0)^{-1}\cdot f\cdot\alpha$ и $P^-F=(2\alpha_0)^{-1}\cdot F\cdot\overline{\alpha}$. Тогда $D_\alpha F=D_{2\alpha}P^+F+DP^-F$ и $K_\alpha=P^+K_{2\alpha}+P^-K_0$.

$$(K_\alpha F)(x):=-\int_\Gamma K_\alpha(x-y)n(y)F(y)d\Gamma_y=-\int_\Gamma\left[P^+K_{2\alpha_0}+P^-K_0\right](x-y)n(y)F(y)d\Gamma_y=$$

$$=\int_\Gamma\frac{\alpha}{2\alpha_0}\left[D_{-2\alpha_0}\Phi_{2\alpha_0}\right](x-y)n(y)F(y)d\Gamma_y+\frac{\overline{\alpha}}{2\alpha_0}\int_\Gamma\left[D_{-0}\Phi_0\right](x-y)n(y)F(y)d\Gamma_y\,.$$

$$D_{-\alpha_0}\Phi_{\alpha_0}(x)=\left(D\Phi_{\alpha_0}-\Phi_{\alpha_0}\cdot\alpha_0\right)=\sum_{k=1}^{3}i_k\frac{\partial\Phi_{\alpha_0}}{\partial x_k}+\Phi_{\alpha_0}\cdot\alpha_0\,,$$

$$\left[D_{-2\alpha_0}\Phi_{2\alpha_0}\right](x-y):=\sum_{k=1}^{3}i_k\frac{\partial\Phi_{2\alpha_0}(x-y)}{\partial x_k}+\Phi_{2\alpha_0}\cdot 2\alpha_0$$

$$\left[D_{-0}\Phi_0\right](x-y):=\sum_{k=1}^{3}i_k\frac{\partial\Phi_0(x-y)}{\partial x_k}+\Phi_0(x-y)\cdot 0=\sum_{k=1}^{3}i_k\frac{\partial\Phi_0(x-y)}{\partial x_k}=$$

$$=\sum_{k=1}^{3} i_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left[-\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty \operatorname{Im}\left[\frac{K(w)}{w-x_3}\right]\frac{du}{\sqrt{u^2+s}}\right].$$

4) $\alpha \in \Re$ и $\alpha_0 = 0$. Тогда $K_\alpha = K_0 + \Phi_0\,\alpha$

$$(K_\alpha F)(x) := -\int_\Gamma K_0(x-y)n(y)F(y)d\Gamma_y - \int_\Gamma \Phi_0(x-y)n(y)F(y)\cdot\alpha\, d\Gamma_y =$$

$$=\int_\Gamma [D_0\Phi_0](x-y)n(y)F(y)\,d\Gamma_y - \int_\Gamma \Phi_0(x-y)n(y)F(y)\cdot\alpha\, d\Gamma_y =$$

$$=\int_\Gamma \sum_{k=1}^{3} i_k \frac{\partial \Phi_0(x-y)}{\partial x_k} n(y)F(y)\,d\Gamma_y - \int_\Gamma \Phi_0(x-y)n(y)F(y)\cdot\alpha\, d\Gamma_y =$$

$$=\int_\Gamma \sum_{k=1}^{3} i_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left[-\frac{1}{2\pi^2 K(x_3)}\int_0^\infty \operatorname{Im}\left[\frac{K(w)}{w-x_3}\right]\frac{du}{\sqrt{u^2+s}}\right].n(y)F(y)\,d\Gamma_y -$$

$$-\int_\Gamma \left[-\frac{1}{2\pi^2 K(x_3)}\int_0^\infty \operatorname{Im}\left[\frac{K(w)}{w-x_3}\right]\frac{du}{\sqrt{u^2+s}}\right] n(y)F(y)\cdot\alpha\, d\Gamma_y .$$

$$K_\alpha F = \begin{cases} P^+K_\xi F + P^-K_\varsigma F \quad \alpha \notin \Re,\ \hat{\alpha} \neq 0, \\ K_\alpha F + \dfrac{\partial}{\partial \alpha_0}\left[K_{\alpha_0} F\right]\cdot \hat{\alpha}, \quad \alpha \notin \Re,\ \hat{\alpha}^2 = 0, \\ P^+K_{2\alpha_0} F + P^-K_0 F,\ \alpha \in \Re,\ \alpha_0 \neq 0, \\ K_0 F - V_0 F\cdot\alpha, \quad \alpha \in \Re,\ \alpha_0 = 0, \end{cases}$$

$$T_\alpha F = \begin{cases} P^+T_\xi F + P^-T_\varsigma F \quad \alpha \notin \Re,\ \hat{\alpha} \neq 0, \\ T_{\alpha_0} F + \dfrac{\partial}{\partial \alpha_0}\left[T_{\alpha_0} F\right]\cdot \hat{\alpha}, \quad \alpha \notin \Re,\ \hat{\alpha}^2 = 0, \\ P^+T_{2\alpha_0} F + P^-T_0 F,\ \alpha \in \Re,\ \alpha_0 \neq 0, \\ T_0 F + W_0 F\cdot\alpha, \quad \alpha \in \Re,\ \alpha_0 = 0 \end{cases}$$

Справедливо обобщенная интегральная формула Коши аналогично [9].

Теорема 1. Пусть $F \in \ker D_\alpha \cap C(\overline{\Omega})$, $\alpha \in Q$. Тогда

$$(K_\alpha F)(x) = F(x),\ x \in \Omega, \tag{12}$$

где

$$K_\alpha F = \begin{cases} P^+K_\xi F + P^-K_\varsigma F,\ \alpha \notin \Re \text{ и } \hat{\alpha} \neq 0, \\ K_{\alpha_0} F + \dfrac{\partial}{\partial \alpha_0}[K_{\alpha_0} F], \quad \alpha \notin \Re \text{ и } \hat{\alpha}^2 = 0, \\ P^+K_{2\alpha} F + P^-K_0 F,\ \alpha \in \Re \text{ и } \alpha_0 \neq 0, \\ K_0 F - V_0 F\alpha, \qquad \alpha \in \Re \text{ и } \alpha_0 = 0. \end{cases} \tag{13}$$

$$(K_\alpha F)(x) := -\int_{\partial\Omega} K_\alpha(x-y)n(y)F(y)dS_y, \quad x \in R^3 \setminus \partial\Omega, \tag{14}$$

$$(V_\mu F)(x) := \int\limits_{\partial\Omega} h_\mu(x-y)n(y)F(y)dS_y\,,\quad \mu\in C\,,\; x\in R^3\,, \tag{15}$$

$n(y)$ - внешняя нормаль к $\partial\Omega$ в точке y.

Поскольку функция Карлемана отличается от фундаментальных решений на решение, транспонированной системы, то интегральная формула Коши остаётся справедливой, если в ней заменить фундаментальное решение на функцию Карлемана

$$-2\pi^2 e^{\sigma x_3}\Phi(y,x,\alpha) = \int\limits_0^\infty \frac{1}{u^2+r^2}\left(\cos\sigma\sqrt{u^2+s} - (y_3-x_3)\frac{\sin\sigma\sqrt{u^2+s}}{\sqrt{u^2+s}}\right)ch(\alpha u)du\,. \tag{16}$$

Положим

$$F_\sigma(x) = (K_\alpha^\sigma F)(x)\,,\; x\in\Omega. \qquad 17)$$

Верна следующая

Теорема 2. Пусть $F\in\ker D_\alpha \bigcap C(\overline{\Omega})$, $\alpha\in Q$. На части T границы $\partial\Omega$ удовлетворяет условию

$$|F(y)|\le M\,, \tag{18}$$

где M - заданное положительное число. Тогда для любого $x\in\Omega$ и $\sigma>0$ справедливо неравенство

$$|F(x)-F_\sigma(x)|\le C(\sigma,\alpha)e^{-\sigma x_3}\,. \qquad 19)$$

Литература

1. Moisil Gr.C., Theodorecko N. Fonctions holomorphes dans l'espase. Mathematica. № 5. 141, 1931.

2. Mises R. Integral theorems in three-dimentional potential flow // Bull. Amer. Math. Soc., vol. 50. 1944. – C.509-611.

3. Klaus Gurlebeck, Wolfgang Sprobig Quaternionic analysis and elliptic boundary value problems – Basel; Boston; Berlin: Birkhauser, 1990.

4. Brackx F., Delanghe K., Sommen F. Clifford analysis. – L.: Pitman, 1982. V.76. – P. 308.

5. Владимиров В.С., Волович И.В. Суперанализ // Теоретическая и математическая физика. 1984.Т. 59. №1. – С.3-27.

6. Владимиров В.С., Волович И.В. Суперанализ. II. Интегральное исчисление // Теорет. и математ. физика. 1984.Т. 60. №2. – С.169-198.

7. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. – Новосибирск: Изд-во СО АН СССР. 1962. – С. 92.

8. Ярмухамедов Ш. О задаче Коши для уравнения Лапласа // ДАН СССР. – 1977. Т. 235. №2. – С. 281-284.

9. Кравченко В.В., Шапиро М.В. Об обобщенной системе уравнений Коши-Римана с кватернионным параметром // ДРАН, 1993.Т. 329. №5. – С. 547–549.

Integration ISSN: 2992-9210
10. Тихонов А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // ДАН СССР. – 1963. – Т.151. №3. – С.501-504.

11. Ярмухамедов Ш. О продолжении решения уравнения Гельмгольца // ДРАН. – 1997. – С. 320-323.

12. Ярмухамедов Ш. Регуляризация по Лаврентьеву решения задачи Коши для уравнения Гельмгольца // ДАН РУз.– 2001. №3. – С. 6-8.

13. Тарханов Н.Н. О матрице Карлемана для эллиптических систем // ДАН СССР. – 1985. –Т.284. №2. – С. 294-297.

14. Айзенберг Л.А., Тарханов Н.Н. Абстрактная формула Карлемана // ДАН СССР. – 1988. – Т. 298. №6. – С. 1292-1296.

15. Мергелян С.Н. Гармоническая аппроксимация и приближенное решение задачи Коши для уравнения Лапласа // УМН. 1956. Т. 11. – Вып. 5. – С. 3-26.

16. Ярмухамедов Ш. Об аналитическом продолжении голоиорфного вектора по его граничным значениям на куске границы // Изв.АН УзССР. – 1980. №6. Серия физико-математических наук. – С. 34-40.

17. Ishankulov T. Continuation of the solution to the Moisil-Teodoresko‘s system of equations // International conference ILL-POSED AND INVERSE PROBLEMS, August 5-9. 2002. Novosibirsk.

18. Сатторов Э.Н. Регуляризация решения задачи Коши для обобщенной системы Моисил – Теодореско // Дифференциалъные уравнения. – 2008. – Т. 44. №8. – С. 1100 – 1110.

19. Сатторов Э.Н. О продолжении решений обобщенной системы Коши-Римана в пространстве // Мат. заметки. – 2009. –Т. 85. –вып. 5. май. – С. 768-781.

20. Сатторов Э.Н. О продолжении решения однородной системы уравнений Максвелла // Изв. ВУЗ. Математика. – 2008. № 8. – С. 78-83.

21. Сатторов Э.Н. Регуляризация решения задачи Коши для системы уравнений Максвелла в бесконечной области // Мат. заметки. – 2009. Т. 86. –вып. 3. сентябр. – С. 445-455.

22. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1988. – 512 с.

Сатторов Э.Н.
Заведующий кафедрой Точных наук, Узбекско-Финский педагогический институт, Самарканд, Узбекистан
e-sattorov@rambler.ru

Рустамов С.У. *Базовый докторант кафедры Математика, Навоинский государственный педагогический институт, Навои, Узбекистан*
e-Sohibjon_17@mail.ru