ISSN: 2992-9210

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Акрам Хасанович Бегматов[1], Алишер Сидикович Исмоилов[2]

1. Белорусско-Узбекский межотраслевой институт прикладных технических квалификаций, Ташкент . Узбекистан
2. Узбекско-Финский педагогический институт, Самарканд, Узбекистан

Annotatsiya: Ushbu maqolada sferalar oilasi bo‘yicha fazoda funksiyani tiklash masalasi qaraladi. Yechimning yagonaligi masalani Volterraning birinchi tur keyin esa ikkinchi tur integral teglamasiga keltirish yo‘li bilan isbotlanadi.

Kalit so‘zlar: *integral geometriya masalasi, sferalar oilasi, Volterra integral tenglamasi, yechimning yagonaligi*

Аннотация: В статье рассматривается задача восстановления функции по семействам сфер в пространстве. Доказывается единственность решения задачи путем сведения к интегральному уравнению Вольтерра первого, а затем второго рода.

Ключевые слова: *задача интегральной геометрии, семейство сфер, интегральное уравнение Вольтера, единственность решения*

Abstract: The dissertation considers the problem of recovering a function from families of spheres in space. The uniqueness of the solution of the problem is proved by reducing it to the Volterra integral equation of the first and then the second kind.

***Keywords**: integral geometry problem, family of spheres, Volterra integral equation, uniqueness of solution*

[1] Белорусско-Узбекский межотраслевой институт прикладных технических квалификаций, доктор физико-математических наук, профессор, akrambegmatov@mail.ru

[2] Узбекско-Финский педагогический институт, PhD, физико-математические науки, alisher_8778@mail.ru

Введение

Математическое исследование проблем, возникающих в таких практически важных и интенсивно развивающихся областях, как интерпретация данных геофизических и аэрокосмических наблюдений, сейсморазведка, медицинская томография и т.д., часто приводит к задачам интегральной геометрии. Так, например, линеаризованная задача интерпретации данных сейсморазведки и линеаризованная обратная кинематическая задача эквивалентны соответствующим задачам интегральной геометрии. Поэтому задачи интегральной геометрии являются одной из актуальных проблем теории дифференциальных уравнений и математической физики.

Рассмотрим функцию

$$\int_{S(y)} \rho(x,y)u(x)d\omega = f(y). \tag{1}$$

Интегральная геометрия есть раздел математики, в котором изучаются различные взаимоотношения между элементами, входящими в (1). Мы будем считать, что в (1) $S(y)$, $\rho(x,y)$, $f(y)$ заданы и рассматривать (1) как линейное операторное уравнение относительно функции $u(x)$ [1].

ISSN: 2992-9210

Первые результаты по единственности и устойчивости задач интегральной геометрии в случае, когда многообразия, по которым ведется интегрирование, имеют вид параболоидов и инвариантны относительно группы всех движений, параллельных $(n-1)$-мерной гиперплоскости, получены В.Г.Романовым [2,3].

В работе М.М.Лаврентьева [6] была предложена весьма плодотворная идея сведения широкого класса задач интегральной геометрии к исследованию уравнения эволюционного типа для некоторой вспомогательной функции. Это, в частности, позволило доказать теорему единственности решения исходной задачи. Отметим, что задача определения функции по ее сферическим средним путем сведения к некоторому дифференциальному уравнению изучалась в монографии [5]. Следует упомянуть также работу [4], в которой изучались другие классы вольтерровых задач интегральной геометрии.

Новые классы задач интегральной геометрии получили свое развитие в работах Акр. Х. Бегматова [7-15]. В его работах изучались задачи интегральной геометрии вольтерровского типа на плоскости и в пространстве.

В работах [16-19] изучены новые классы задачи интегральной геометрии и введены новые подходы к исследованию задач восстановления функции по весовым функциям с особенностью.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу интегральной геометрии для семейства поверхностей в полупространств $z \geq 0$. Поверхность, по которой ведется интегрирование, представляет собой сферу

$$z^2 - \zeta^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2.$$

Обозначим $L_D = \{(x,y,z): x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, 0 \leq z \leq D\}$.

Функция $u(\cdot)$ предполагается финитной по x,y, то есть $u(x,y,z) = 0$ при $(x,y) \notin D$, где D - ограниченная область на плоскости $z = 0$.

Задача 1. В полупространств L_D восстановить функцию трёх переменных $u(x,y,z)$, если известны интегралы от нее по поверхностям семейства $\{\Upsilon(x,y,z)\}$:

$$f(x,y,z) = \int_{\Upsilon(x,y,z)} q(z,\zeta) u(\xi,\eta,\zeta)\, d\omega, \qquad (2)$$

где произвольная поверхность семейства представлена выражением

$$\Upsilon(x,y,z) = \{(\xi,\eta,\zeta): z^2 - \zeta^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2, 0 \leq \zeta \leq z \leq D\}.$$

Предложение 1. *Пусть функция $f(x,y,z)$ известна для всех x, y, z из полупространств L_D, весовая функция $q(z,\zeta) = \frac{1}{\sqrt{z^2-\zeta^2}}$.*

Тогда решение уравнения (2) в классе дважды непрерывно дифференцируемых финитных функций с носителем в полупространств L_D единственно.

ISSN: 2992-9210

Доказательство. Запишем уравнение (2) в следующем виде:

$$\int_0^z \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\rho} u(x+\rho\cos\varphi, y+\rho\sin\varphi, \zeta)\, d\varphi\, d\zeta = f(x,y,z), \tag{3}$$

где $\rho = \dfrac{1}{\sqrt{z^2-\zeta^2}}$.

Применим к обеим частям уравнения (3) преобразование Фурье по переменной x:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} f(x,y,z)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} \int_0^z \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\rho} u(x+\rho\cos\varphi, y+\rho\sin\varphi, \zeta)\, d\varphi\, d\zeta\, dx,$$

$$\hat{f}(\lambda, y, z) = \int_0^z \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} \frac{1}{\rho} u(x+\rho\cos\varphi, y+\rho\sin\varphi, \zeta)\, dx \right) d\varphi\, d\zeta =$$

$$= \int_0^z \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda(x+\rho\cos\varphi)} e^{-i\lambda\rho\cos\varphi} \frac{1}{\rho} u(x+\rho\cos\varphi, y+\rho\sin\varphi, \zeta)\, dx \right) d\varphi\, d\zeta =$$

$$= \int_0^z \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\rho} e^{-i\lambda\rho\cos\varphi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda(x+\rho\cos\varphi)} u(x+\rho\cos\varphi, y+\rho\sin\varphi, \zeta)\, dx \right) d\varphi\, d\zeta =$$

$$= \int_0^z \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\rho} e^{-i\lambda\rho\cos\varphi} \hat{u}(\lambda, y+\rho\sin\varphi, \zeta)\, d\varphi\, d\zeta. \tag{4}$$

Применим к обеим частям уравнения (4) преобразование Фурье по переменной y:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\mu y} \hat{f}(\lambda, y, z)\,dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\mu y} \int_0^z \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\lambda\rho\cos\varphi} \frac{1}{\rho} \hat{u}(\lambda, y+\rho\sin\varphi, \zeta)\, d\varphi\, d\zeta\, dy.$$

$$\hat{\hat{f}}(\lambda, \mu, z) = \int_0^z \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\rho} e^{-i\lambda\rho\cos\varphi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\mu y} \hat{u}(\lambda, y+\rho\sin\varphi, \zeta)\, dy \right) d\varphi\, d\zeta =$$

$$= \int_0^z \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\rho} e^{-i\lambda\rho\cos\varphi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\mu(y+\rho\sin\varphi)} e^{-i\mu\rho\sin\varphi} \hat{u}(\lambda, y+\rho\sin\varphi, \zeta)\, dy \right) d\varphi\, d\zeta =$$

ISSN: 2992-9210

$$=\int_0^z\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\rho}e^{-i\lambda\rho\cos\varphi}e^{-i\mu\rho\sin\varphi}\hat{\hat{u}}(\lambda,\mu,\zeta)d\varphi d\zeta=\int_0^z\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\rho}e^{-i\rho(\lambda\cos\varphi+\mu\sin\varphi)}\hat{\hat{u}}(\lambda,\mu,\zeta)d\varphi d\zeta=$$

$$=\int_0^z\hat{\hat{u}}(\lambda,\mu,\zeta)\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\rho}e^{-i\rho(\lambda\cos\varphi+\mu\sin\varphi)}d\varphi d\zeta=$$

$$=\int_0^z\hat{\hat{u}}(\lambda,\mu,\zeta)\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{z^2-\zeta^2}}e^{-i\sqrt{z^2-\zeta^2}(\lambda\cos\varphi+\mu\sin\varphi)}d\varphi d\zeta.$$

Мы получили интегральное уравнение Вольтерра первого рода относительно функции $\hat{\hat{u}}(\lambda,\mu,\zeta)$

$$\int_0^z\hat{\hat{u}}(\lambda,\mu,\zeta)\frac{I(\lambda,\mu,z,\zeta)}{\sqrt{z-\zeta}}d\zeta=\hat{\hat{f}}(\lambda,\mu,z) \qquad (5)$$

где

$$I(\lambda,\mu,z,\zeta)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{z+\zeta}}e^{-i\sqrt{z^2-\zeta^2}(\lambda\cos\varphi+\mu\sin\varphi)}d\varphi \qquad (6)$$

Исследуем уравнение (6). В интеграле (6) сделаем замену

$$\lambda\cos\varphi+\mu\sin\varphi=\gamma\sin(\varphi+k),\quad \gamma=\sqrt{\lambda^2+\mu^2},\quad k\in\left[-\frac{\pi}{2};0\right)\cup\left(0;\frac{\pi}{2}\right].$$

Таким образом, уравнение (6) примет вид

$$I(\lambda,\mu,z,\zeta)=\frac{1}{\sqrt{z+\zeta}}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i\gamma\sqrt{z^2-\zeta^2}\sin(\varphi+k)}d\varphi=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{z+\zeta}}\left(\int_{-\pi}^{0}e^{-i\gamma\sqrt{z^2-\zeta^2}\sin(\varphi+k)}d\varphi+\int_0^{\pi}e^{-i\gamma\sqrt{z^2-\zeta^2}\sin(\varphi+k)}d\varphi\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{z+\zeta}}\left(I_1(z,\zeta,\lambda,\mu)+I_2(z,\zeta,\lambda,\mu)\right).$$

$$I_1(z,\zeta,\lambda,\mu)=\int_{-\pi}^{0}e^{-i\gamma\sqrt{z^2-\zeta^2}\sin(\varphi+k)}d\varphi$$

$$\gamma\sin(\varphi+k)=v,$$

$$\varphi=arc\sin\frac{v}{\gamma}-k,$$

$$d\varphi=\frac{dv}{\gamma\sqrt{1-\frac{v^2}{\gamma^2}}},$$

ISSN: 2992-9210

$$-\gamma \sin k \le \varphi \le \gamma \sin k,$$

$$I_1(z,\zeta,\lambda,\mu) = \int_{-\gamma\sin k}^{\gamma\sin k} e^{-\left(i\sqrt{z^2-\zeta^2}\right)v} \frac{dv}{\gamma\sqrt{1-\frac{v^2}{\gamma^2}}} \tag{7}$$

Оценим интеграл (7)

$$\left|I_1(z,\zeta,\lambda,\mu)\right| = \left|\int_{-\gamma\sin k}^{\gamma\sin k} e^{-i(\sqrt{z^2-\zeta^2})v} \frac{dv}{\gamma\sqrt{1-\frac{v^2}{\gamma^2}}}\right| \le$$

$$\le 2\int_0^{\gamma\sin k} \frac{dv}{\gamma\sqrt{1-\frac{v^2}{\gamma^2}}} = \frac{2}{\gamma}\arcsin\frac{v}{\gamma}\Big|_0^{\gamma\sin k} =$$

$$= \frac{2}{\gamma}\left(\arcsin(\sin k) - \arcsin 0\right) = \frac{2k}{\gamma}.$$

Таким образом,

$$\left|I_1(z,\zeta,\lambda,\mu)\right| \le \frac{2k}{\gamma}.$$

Также для $I_1(z,\zeta,\lambda,\mu)$, если мы сделаем то же самое, что и выше, мы получаем выражение

$$\left|I_2(z,\zeta,\lambda,\mu)\right| \le \frac{2k}{\gamma}.$$

Таким образом,

$$\left|I(z,\zeta,\lambda,\mu)\right| \le \frac{1}{\sqrt{z+\zeta}}\left(\left|I_1(z,\zeta,\lambda,\mu)\right| + \left|I_2(z,\zeta,\lambda,\mu)\right|\right) \le \frac{4k}{\gamma\sqrt{z+\zeta}}$$

или

$$I(z,\zeta,\lambda,\mu) = \frac{4k}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}\sqrt{z+\zeta}}. \tag{8}$$

Уравнение (5) имеет интегрируемую особенность на диагонали $z=\zeta$. Как видно из формулы (8), функция $I(\lambda,\mu,z,\zeta)$ непрерывна в области $0<\zeta\le z<D$ и

$$I(\lambda,\mu,z,z) = \frac{4k}{\sqrt{2z}\sqrt{\lambda^2+\mu^2}} \ne 0.$$

ISSN: 2992-9210

Используя выражение (5) для функции $I(\lambda,\mu,z,\zeta)$, нетрудно показать, что частная производная первого порядка по переменной z этой функции не имеет слабую особенность на диагонали $z=\zeta$:

$$I_z{}'(\lambda,\mu,z,\zeta)=-\frac{2k\,dz}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}\sqrt{(z+\zeta)^3}}.$$

Мы можем свести уравнение (5) к уравнению Вольтерра второго рода, применяя прием Абеля [20]. Для этого умножим равенство (5) на $1/\sqrt{t-z}$ и проинтегрируем по z в пределах от нуля до t. Меняя в возникающем повторном интеграле порядок интегрирования, находим

$$\int_0^t \frac{\hat{\hat{f}}(\lambda,\mu,z)}{\sqrt{t-z}}dz=\int_0^t\frac{dz}{\sqrt{t-z}}\int_0^z\hat{u}(\lambda,\mu,\zeta)I(\lambda,\mu,z,\zeta)\frac{d\zeta}{\sqrt{z-\zeta}}=$$

$$=\int_0^t\hat{u}(\lambda,\mu,\zeta)\left[\int_\zeta^t\frac{I(\lambda,\mu,z,\zeta)}{\sqrt{t-z}\sqrt{z-\zeta}}dz\right]d\zeta. \qquad (9)$$

Стоящая здесь под интегралом в квадратных скобках функция

$$T(t,\zeta,\lambda,\mu)=\int_\zeta^t\frac{I(\lambda,\mu,z,\zeta)}{\sqrt{t-z}\sqrt{z-\zeta}}dz$$

имеет конечное значение, отличное от нуля, при $t=\zeta$. Чтобы убедиться в этом, сделаем замену переменной

$$z=t\cos^2\varphi+\zeta\sin^2\varphi.$$

$$dz=(-2t\sin\varphi\cos\varphi+2\zeta\sin\varphi\cos\varphi)d\varphi=2(\zeta-t)\sin\varphi\cos\varphi d\varphi.$$

$$1)\ z=\zeta,\ \Rightarrow\ \xi=t\cos^2\varphi+\zeta\sin^2\varphi,$$

$$\zeta(1-\sin^2\varphi)=t\cos^2\varphi,$$

$$\zeta\cos^2\varphi=t\cos^2\varphi,\ \Rightarrow\ \cos^2\varphi=0,\ \Rightarrow\ \varphi=\frac{\pi}{2}.$$

$$2)\ z=t,\ \Rightarrow\ t=t\cos^2\varphi+\zeta\sin^2\varphi,$$

$$t(1-\cos^2\varphi)=t\sin^2\varphi,$$

$$\zeta\sin^2\varphi=t\sin^2\varphi,\ \Rightarrow\ \sin^2\varphi=0,\ \Rightarrow\ \varphi=0.$$

ISSN: 2992-9210

Тогда функция $T(t,\zeta,\lambda,\mu)$ примет следующий вид:

$$T(t,\zeta,\lambda,\mu)=\int\limits_{\zeta}^{t}\frac{4k}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}\sqrt{z+\zeta}\sqrt{t-z}\sqrt{z-\zeta}}dz=$$

$$=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{4k2(\zeta-t)\sin\varphi\cos\varphi d\varphi}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}\sqrt{t\cos^2\varphi+\zeta\sin^2\varphi+\zeta}\sqrt{t-t\cos^2\varphi-\zeta\sin^2\varphi}\sqrt{t\cos^2\varphi+\zeta\sin^2\varphi-\zeta}}=$$

$$=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{8k(t-\zeta)\sin\varphi\cos\varphi d\varphi}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}\sqrt{t\cos^2\varphi+\zeta\sin^2\varphi+\zeta}\sqrt{t(1-\cos^2\varphi)-\zeta\sin^2\varphi}\sqrt{t\cos^2\varphi-\zeta(1-\sin^2\varphi)}}=$$

$$=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{8k(t-\zeta)\sin\varphi\cos\varphi d\varphi}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}\sqrt{t\cos^2\varphi+(1+\sin^2\varphi)\zeta}\sqrt{(t-\zeta)\sin^2\varphi}\sqrt{(t-\zeta)\cos^2\varphi}}=$$

$$=2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{4kd\varphi}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}\sqrt{t\cos^2\varphi+(1+\sin^2\varphi)\zeta}}.$$

или

$$T(t,\zeta,\lambda,\mu)=2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}I(\lambda,\mu,t\cos^2\varphi+\zeta\sin^2\varphi,\zeta)d\varphi, \tag{10}$$

где

$$I(\lambda,\mu,t\cos^2\varphi+\zeta\sin^2\varphi,\zeta)=$$

$$=\frac{4k}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}\sqrt{t\cos^2\varphi+(1+\sin^2\varphi)\zeta}}.$$

Отсюда, полагая $\zeta=t$, находим

$$I(\lambda,\mu,t,t)=2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{4k}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}\sqrt{t\cos^2t+(1+\sin^2\varphi)t}}d\varphi=$$

ISSN: 2992-9210

$$= 2\frac{4k}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{t\cos^2 t + t + t\sin^2\varphi}} =$$

$$= 2\frac{4k}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{2t}} = 2\frac{4k}{\sqrt{2t}\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4k\pi}{\sqrt{2t}\sqrt{\lambda^2+\mu^2}} \neq 0.$$

Используя формулу (10), легко также убедиться в том, что функция $T(t,\zeta,\lambda,\mu)$ имеет непрерывную производную по переменной t всюду за исключением диагонали $\zeta = t$. На диагонали $T_t(t,\zeta,\lambda,\mu)$ имеет интегрируемую особенность вида $1/\sqrt{t-z}$. Дифференцируя равенство (9) и деля на $T(t,t,\lambda,\mu)$, получаем для отыскания $\hat{\hat{u}}(\lambda,\mu,t)$ при каждом фиксированном λ и μ интегральное уравнение Вольтерра второго рода:

$$\hat{\hat{u}}(\lambda,\mu,t) + \int_0^t \hat{\hat{u}}(\lambda,\mu,t)\frac{T_t(\lambda,t,t)}{T(\lambda,t,t)}d\zeta = \frac{1}{T(\lambda,t,t)}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\frac{\hat{\hat{f}}(\lambda,\mu,z)}{\sqrt{t-z}}dz$$

с ядром, имеющим интегрируемую особенность на диагонали. Как следует из общей теории, решение таких уравнений единственно [20].

Заключение

В этом статье была изучена задача восстановления функции по семействам сфер в пространстве. В этом разделе были приведены постановки задач восстановления функции по интегральным данным. Исследованы вопросы единственности решения интегральных уравнений Вольтерра, связанных с изучаемыми задачами интегральной геометрии. Были доказана единственность решения задачи путем сведения к интегральному уравнению Вольтерра первого, а затем второго рода. При доказательстве были использованы методы преобразования Фурье.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я. Теория операторов и некорректные задачи. -- Издательство Института математики, Новосибирск 2010, — 912 с.

2. Романов В.Г. О восстановлении функции через интегралы по семейству кривых // Сиб. мат. журнал. - 1967. - Т. 8, № 5. - С. 1206-1208.

3. Романов В.Г. Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа. —Новосибирск: Наука, 1972. -164 с

ISSN: 2992-9210

4. Бухгейм А.Л. О некоторых задачах интегральной геометрии // Сиб. мат. журнал, - Т. 13, С. 34-42. 1972.

5. Йон Ф. Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными. -М.: Изд-во иностр. лит., 1958. - 158 с.

6. Лаврентьев М.М. Обратные задачи и специальные операторные уравнения первого рода // Междунар. мат. конгресс в Ницце, 1970. - М.: Наука, - С. 130-136. 1972.

7. Begmatov A.Kh. On a class of weakly ill-posed Volterra-type problems of integral geometry in the three-dimensional space, Inverse ill-Posed Probl 3, 231-235, 1993.

8. Begmatov A.Kh. On a class of problems in integral geometry in the plane, Doklady Akademii Nauk 331 (3), 261-262, 1993.

9. Бегматов Акр. Х. Два класса слабо некорректных задач интегральной геометрии на плоскости, Сиб. мат. журн. Т. 36, No 2. С. 243-247. 1995.

10. Бегматов Акр.Х. Задачи интегральной геометрии для семейства конусов в n-мерном пространстве, Сиб. мат. журн. Т. 37, No 3. С. 500-505. 1996.

11. Begmatov A.Kh. Volterrovskiye zadachi integralnoy geometrii na ploskosti dlya krivix s osobennostyami, Sib. mat. jurn 38 (4), 723-737, 1997.

12. Begmatov A.Kh. Problems of integral geometry over special curves and surfaces with singularities at the vertices, Doklady Akademii Nauk 358 (2), 151-153. 1998.

13. Begmatov A.Kh. Two new classes of problems in integral geometry, Doklady Mathematics 57 (3), 427-429. 1998.

14. Begmatov A.Kh. On a class of problems in integral geometry in the plane, Doklady Akademii Nauk 331 (3), 261-262, 2002.

15. Бегматов Акр.Х. Теоремы существования решения двух слабо некорректных задач интегральной геометрии, Доклады Академии наук 386 (6), 727-729, 2002.

16. Begmatov Akram Kh., Ismoilov A.S. Restoring the function set by ıtegrals for the family of parabolas on the plane // Bulletin of National University f Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences, Vol. 3, issue 2. pp. 246-254. 020.

17. Begmatov A.Kh., Ismoilov A.S. On a problem of integral geometry over a family of parabolas with perturbation // Journal of the Balkan Tribological Association 27 (4), 497-509, 2021.

18. Begmatov A.Kh., Ismoilov A.S. Weakly ill-posed problems of integral geometry on the Plane. Uzbek Mathematical Journal, Volume 66, Issue 1, pp.64-75. 2022.

19. Begmatov A.Kh., Ismoilov A.S., Khudayberdiev D.G. Weakly ill-posed problems of integral geometry on the plane with perturbation. Journal of the Balkan Tribological Association, Vol. 29, No 3, 273–289. 2023.

ISSN: 2992-9210
20. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. - М.: Изд-во иностр. лит., 1957.- 443 с.