ISSN: 2992-9210

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВО ФУНКЦИЯ КАРЛЕМАНА БИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Ашурова З.Р, Жураева У.Ю., Маллаева Ф.У.

Annotatsiya

Bu ishda haqiqiy 2-oʻlchovli Yevklid fazosidagi ma’lum chegaralanmagan sohalarda 2-chi tartibli poligarmonik funksiyalarning $(\Delta^2 \mathrm{u}(\mathrm{y}) = 0)$ integral formulasini va ularning xossalarini aniqlash uchun Karleman funktsiyasi oʻrganilgan.

Kalit soʻzlar: *Fragmena – Lindelefa tipidagi teoremalar, bigarmonik funksiyalar, Karleman funksiyasi, integral tasvir.*

Аннотация

В этом работе рассматрывается полугармонические функции 2-го порядка заданное в некотором неограниченном множестве 2-мерного пространства $(\Delta^2 \mathrm{u}(\mathrm{y}) = 0)$ получив интегральное представление с помоши её получается теоремы типа Фрагмена – Линделефа.

Ключевые слова: *теоремы типа Фрагмена – Линделефа, бигармонические функции, интегральное представление.*

Abstract

In this article we consider Carleman’s functions, to find integral representation for the polygarmonious functions$(\Delta^2 \mathrm{u}(\mathrm{y}) = 0)$ defined in unbounded domain of Euclidean space obtaining an integral representation, with its help, a theorem of the Fragmen-Lindelef type is obtained

Keywords: *Phragmen-Lindelof type theorems, biharmonic functions, Carleman’s function, integral representation.*

Постановка задачи. В теории функций известна следующая теорема:

Теорема. *Пусть аналитическая функция F (z), регулярная в угле* $|arg\, z| < \frac{\pi}{2\rho}$ *и непрерывна вплоть до его сторон, на сторонах угла удовлетворяет условия* $|F(z)| \le M$. *Тогда или во всем угле или* $|F(z)| \le M$, *или*

$$\max_{\substack{|z|=r \\ |\arg z|<\frac{\pi}{2\rho}}} |F(z)| > e^{cr^{\rho}} \quad (c > 0, r > r_0).$$

Приведенная теорема гласит, что для угла $|arg\, z| < \frac{\pi}{2\rho}$ это пределная скорость роста не ниже чем $e^{c|z|^{\rho}}$, например функция $e^{cz^{\rho}}$ показывает, что найденная скорость роста точна.

ISSN: 2992-9210

Если мы хотим распространить эту задачу т.е теоремы типа Фрагмена-Линделефа для бигармонических функций, то мы должны потребовать ограниченность самой функции и ее нормальной производной:

Дана бесконечная область **D,** требуется показать, что если функция и ее нормальная производная ограничены на границе D и $u(\mathrm{P})$ неограниченна внутри, то при $\mathrm{P} \to \infty$ она должна расти внутри D со скоростью, не меньшей некоторой предельной, и оценить эту предельную скорость роста.

Для гармонических функций это задача была предметом исследования М.А.Евграфова [1], И.А.Чегиса [2], А.Ф.Леоньтевым, И.С.Аршоном [3], Ш.Ярмухамедовым [4]- [5], З.Р.Ашуровой [6]- [9], Н.Жураевой [10]- [14], и У.Жураевой [15]- [16], др.

В 1960 году М.А.Евграфов и И.А.Чегис в статье- Обобшение теоремы типа Фрагмена–Линделефа для аналитических функций на гармонические функции в пространстве - (ДАН СССР, том 134, номер 2, 252–262) доказали

Теорема 1. *Рассматривается гармоническая функция* $u(r,\phi,x)$ *в круглом цилиндре:* $0 \le r \le \mathrm{a}$, $0 \le \phi < 2\pi$, $-\infty < \mathrm{x} < \infty$ *, которая на поверхности цилиндра равна нулю, а внутри цилиндра удовлетворяет условию*

$$\left|\frac{\partial u}{\partial r}(r,\phi,x)\right| < c,\ \max_{(r,\phi)} |u(r,\phi,x)| < c\, exp\, exp\, \frac{\pi|x|}{2(a+\varepsilon)}, \varepsilon > 0$$

тогда $u(r,\phi,\mathrm{x}) \equiv 0$.

Аналогичная теорема установлена И. А. Чегис в работе (2) для случая цилиндра с прямоугольным основанием.

В 1972 году используя идеи М.М.Лаврентьева, Ш. Ярмухамедов [4]- [5], в своих работах впервые предлагает метод построения семейства фундаментальных решений уравнения Лапласа. Им получена интегральная формула Грина в неограниченной области в классе растущих гармонических функций. В этом направлении им было установлено теорема типа Фрагмена - Линделефа для гармонических функций. Использовав ядро Ярмухамедова З.Р. Ашурова [6]- [9], получила несколько теорем типа Фрагмена-Линделефа для гармонических функций многих переменных.

Н.Ю. Жураева [10]-[14] получила регуляризацию и разрешимость задачи Коши для полигармонических уравнений порядка n в некоторых неограниченных областях (при произвольных нечетных m и четных m когда $2\mathrm{n} < m$). Позже У.Ю. Жураева [15]-[16]. получила несколько теорем типа Фрагмена-Линделефа для бигармонических функций многих переменных.

В данной работы строится функция Карлемана для полигармонических функций второго порядка (т.е. для бигармонических функций), определенных в области $D \subset R^2$, где $D = \{y\colon y = (y_1, y_2), y_2 > 0\}$.

ISSN: 2992-9210

Функции $\varphi_\sigma(y,x)$ и $\Phi_\sigma(y,x)$, при $s>0$, $\sigma\geq 0$ определим следующими равенствами:

$$\varphi_\sigma(y,x)=\frac{1}{c_2K(x_2)}\int_0^\infty Im\left[\frac{K\left(i\sqrt{u^2+s}+y_2\right)}{i\sqrt{u^2+s}+y_2-x_2}\right]\frac{udu}{\sqrt{u^2+s}}, \quad (1)$$

$$K(\omega)=\frac{exp(-\sigma(\omega+1)^{\rho_1})}{(\omega+x_2)^2},$$

$$\Phi_\sigma(y,x)=c_0r^2\varphi_\sigma(y,x) \quad (2)$$

где, $c_0\in R$, $\omega=i\sqrt{u^2+s}+y_2$, $s=\alpha^2=(y_1-x_1)^2$, $c_2=2^{-1}\pi\omega_2$, ω_2 – площадь единичного круга в $R^2, r=|y-x|, r_1{}^2=s+(y^2+x^2)^2$, $x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2), \sigma>0, y_2>0,$ $0<\rho_1<1$. Для удобство записи в дальнейшим обозначим через $c_0\in R$ все постоянные числа.

Здесь берется регулярная ветвь аналитической функции w^ρ в плоскости с разрезом вдоль вещественной отрицательной полуоси.

Следует отметить, что аналогичная формула типа (1)-(2) имеется в работах [6]-[18].

Лемма 1. Функция $\varphi_\sigma(y,x)$, определенная формулой (1), имеет вид

$$\varphi_\sigma=c_0\int_0^\infty\frac{\left((y_2-x_2)\left((y_2+x_2)^2-(u^2+s)\right)-2(y_2+x_2)(u^2+s)\right)\sin(\lambda)}{(u^2+r^2)(u^2+r_1{}^2)^2\,exp(\sigma A_1)}\frac{udu}{\sqrt{u^2+s}}+$$

$$+c_0\int_0^\infty\frac{\left(\left((y_2+x_2)^2-(u^2+s)\right)+2(y_2-x_2)(y_2+x_2)\right)cos(\lambda)}{(u^2+r^2)(u^2+r_1{}^2)^2\,exp(\sigma A_1)}udu$$

и при $\alpha>0$ - является гармонической функцией.

$$c_0=\frac{8\pi x_2{}^2}{exp(\sigma(x_2+1)^{\rho_1})}$$

$$A_1=((y_2+1)^2+u^2+s)^{\frac{\rho_1}{2}}cos\left(\rho_1 arctg\frac{\sqrt{u^2+s}}{(y_2+1)}\right),$$

$$\lambda=((y_2+1)^2+u^2+s)^{\frac{\rho_1}{2}}sin\left(\rho_1 arcctg\frac{\sqrt{u^2+s}}{(y_2+1)}\right).$$

Лемма 2. Если $\varphi_\sigma(y,x)$ гармоническая функция в R^2 то справедливо равенство

$$\Delta r^2\varphi_\sigma(y,x)=\phi_{\sigma,1}(y,x),$$

где

$$\phi_{\sigma,1}(y,x)=4\varphi_\sigma(y,x)+4\left((y_1-x_1)\frac{\partial\phi_\sigma(y,x)}{\partial y_1}+(y_2-x_2)\frac{\partial\phi_\sigma(y,x)}{\partial y_2}\right)$$

и она является гармонической функцией в R^2 по переменному y включая и точку x.

Лемма 3. Функция $\Phi_\sigma(y,x)$ определенная формулой (2), является бигармонической функцией.

ISSN: 2992-9210

Теорема 1. Функция $\Phi_\sigma(y,x)$, определенная формулой (1)-(2), имеет вид $\Phi_\sigma(y,x) = c_0 r^2 \ln\frac{1}{r} + r^2 G_\sigma(y,x)$, функция $G(y,x)$- гармоническая функция в $R^2/\{x\}$ по переменную y.

Лемма 4. Для функции $\varphi_\sigma(y,x)$, определяемой условиями (1) имеет место неравенство

$$|\varphi_\sigma(y,x)| \le \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r_1{}^2}\right)\frac{c_0}{exp(\sigma A)} \text{ где } A = c_0((y_2+1)^2 + s)^{\frac{\rho_1}{2}}.$$

Следствие. Для функции $\Phi_\sigma(y,x)$ справедлива оценка

$$|\Phi_\sigma(y,x)| \le \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r_1{}^2}\right)\frac{c_0 r^2}{exp(\sigma A)}$$

Лемма 5. Для функции $\varphi_\sigma(y,x)$, определяемой условиями (1) имеет место неравенство

$$\left|\frac{\partial\varphi_\sigma(y,x)}{\partial y_1}\right| \le \left(\frac{1}{\alpha r^2 r_1^4} + \frac{1}{\alpha^2 r_1^6} + \frac{1}{\alpha r_1^4} + \frac{1}{\alpha^2 r_1^4}\right)\frac{c_0}{\exp(\sigma A)},$$

$$\left|\frac{\partial\varphi_\sigma(y,x)}{\partial y_2}\right| \le \left(\frac{1}{r r_1{}^4} + \frac{1}{r^3 r_1{}^4} + \frac{1}{r r_1{}^6}\right)\frac{c_0}{exp(\sigma A)} \quad .$$

Лемма 6. Для нормальной производной функции $\varphi_\sigma(y,x)$ определяемой условиями (1) имеет место неравенство

$$\left|\frac{\partial\varphi_\sigma(y,x)}{\partial\overline{n}}\right| \le \left(\frac{1}{\alpha r_1{}^4} + \frac{1}{\alpha^2 r_1{}^4} + \frac{1}{\alpha r^2 r_1{}^4} + \frac{1}{r^3 r_1{}^4} + \frac{1}{r r_1{}^4} + \frac{1}{r r_1{}^6} + \frac{1}{\alpha^2 r_1{}^6}\right)\frac{c_0}{exp(\sigma A)}$$

Лемма 7. Для функции $\Phi_\sigma(y,x)$ имеет место неравенство

$$\left|\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial y_2}\right| \le \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r r_1{}^2} + \frac{1}{r r_1{}^4} + \frac{1}{r_1{}^5}\right)\frac{c_0}{exp(\sigma A)}$$

$$\left|\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial y_1}\right| \le \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{\alpha r_1^4} + \frac{1}{\alpha^2 r_1^4} + \frac{1}{\alpha r_1^2} + \frac{1}{\alpha^2 r_1^2}\right)\frac{c_0}{\exp(\sigma A)}$$

$$\left|\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial\overline{n}}\right| \le \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r r_1{}^2} + \frac{1}{\alpha r_1{}^4} + \frac{1}{r r_1{}^4} + \frac{1}{\alpha^2 r_1{}^4} + \frac{1}{\alpha r_1{}^2} + \frac{1}{\alpha^2 r_1{}^2} + \frac{1}{r_1{}^5}\right)\frac{c_0}{exp(\sigma A)}$$

Лемма 8. Для функции $\varphi_\sigma(y,x)$ имеет место неравенство

$$\left|\frac{\partial^2\varphi_\sigma(y,x)}{\partial y_i \partial y_j}\right| \le \left(\frac{1}{\alpha r^4} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha r^2 r_1{}^2} + \frac{1}{\alpha r^4} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r_1{}^2} + \frac{1}{\alpha r_1{}^2} + \frac{1}{\alpha r}\right)\frac{c_0}{r_1{}^4\, exp(\sigma A)}$$

Лемма 9. Для функции $\varphi_\sigma(y,x)$ имеет место неравенство

$$\left|\frac{\partial^2\varphi_\sigma(y,x)}{\partial y_1^2}\right| \le \left(\frac{1}{\alpha r^2} + \frac{1}{r} + \frac{1}{\alpha r r_1^2} + \frac{1}{\alpha r} + \frac{1}{\alpha r_1^2} + 1 + \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r^2}\right)\frac{c_0}{r_1^4\, exp(\sigma A)}$$

$$\left|\frac{\partial^2\varphi_\sigma(y,x)}{\partial y_2^2}\right| \le \left(\frac{1}{r^5} + \frac{1}{\alpha r r_1^4} + \frac{1}{\alpha r r_1^2} + \frac{1}{r^2 r_1^2} + \frac{1}{\alpha r}\right)\frac{c_0}{r_1^4\, exp(\sigma A)}.$$

ISSN: 2992-9210

Лемма 10. Пусть $\bar{n}$-внешняя нормаль к границе ∂D. Тогда для функции $\Phi_\sigma(y,x)$ справедливы неравенства:

$$|\Delta\Phi_\sigma| \le \left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{{r_1}^2}+\frac{1}{r^2{r_1}^4}+\frac{1}{\alpha{r_1}^6}+\frac{1}{{r_1}^4}+\frac{1}{\alpha{r_1}^4}+\frac{1}{{r_1}^6}\right)\frac{c_0}{exp(\sigma A)}.$$

Лемма 11. Пусть $\bar{n}$-внешняя нормаль к границе ∂D. Тогда для функции $\Phi_\sigma(y,x)$ справедливы неравенства:

$$\left|\frac{\partial\Delta\Phi_\sigma(y,x)}{\partial y_1}\right| \le \left(\frac{1}{\alpha r^2{r_1}^4}+\frac{1}{\alpha^2{r_1}^6}+\frac{1}{\alpha{r_1}^4}+\frac{1}{\alpha^2{r_1}^4}+\frac{1}{r^2r_1^4}+\frac{1}{rr_1^4}+\frac{1}{rr_1^6}+\frac{1}{r_1^6}+\frac{1}{r_1^3}+\right.$$
$$\left.\frac{1}{r_1^5}+\frac{1}{\alpha r^3{r_1}^4}+\frac{1}{\alpha{r_1}^3}+\frac{1}{\alpha r{r_1}^6}+\frac{1}{\alpha r^3{r_1}^4}+\frac{1}{\alpha{r_1}^6}\right)\frac{c_0}{exp(\sigma A)}$$

$$\left|\frac{\partial\Delta\Phi_\sigma(y,x)}{\partial y_2}\right| \le \left(\frac{1}{r{r_1}^4}+\frac{1}{r^3{r_1}^4}+\frac{1}{r{r_1}^6}+\frac{1}{r^4{r_1}^4}+\frac{1}{\alpha r_1^8}+\frac{1}{\alpha r_1^6}+\frac{1}{\alpha r_1^4}+\frac{1}{\alpha r^3{r_1}^4}+\frac{1}{\alpha{r_1}^3}+\frac{1}{\alpha r{r_1}^6}+\frac{1}{\alpha r^3{r_1}^4}+\frac{1}{{r_1}^5}+\frac{1}{\alpha{r_1}^5}\right)\frac{c_0}{\exp(\sigma A)}$$

$$\left|\frac{\partial\Delta\Phi_\sigma}{\partial\bar{n}}\right| \le \left(\frac{1}{\alpha r}+\frac{1}{\alpha{r_1}^3}+\frac{1}{\alpha{r_1}^4}+\frac{1}{\alpha^2{r_1}^4}+\frac{1}{\alpha r^2{r_1}^4}+\frac{1}{\alpha r^3{r_1}^4}+\frac{1}{{r_1}^4}+\frac{1}{r^3{r_1}^4}\right)\frac{c_0}{exp(\sigma A)}+$$
$$+\left(\frac{1}{r{r_1}^4}+\frac{1}{\alpha{r_1}^5}+\frac{1}{{r_1}^5}+\frac{1}{r{r_1}^6}+\frac{1}{\alpha{r_1}^6}+\frac{1}{\alpha^2{r_1}^6}+\frac{1}{\alpha r_1^8}\right)\frac{c_0}{exp(\sigma A)}.$$

Интегральное представление, которую мы намерены получить, выражает фундаментальное свойство для бигармонических функций. Иными словами, по граничным значениям функции можно восстановить ее значения всюду внутри области.

Литература

1. Евграфов М.А., Чегис И.А. Обобшение теоремы типа Фрагмена-Линделефа для аналитических функций на гармонические функции в пространстве. Доклады Академии наук СССР. – 1960. № 134. – С. 252-262.
2. Чегис И.А. Теорема типа Фрагмена-Линделефа для гармонических функций в прямоугольном цилиндре. Доклады Академии наук СССР. – 1961. 136. – С. 556-559.
3. Аршон И.С., Евграфов М.А. О росте функций, гармонических в цилиндре и ограниченных на его поверхности вместе с нормальной производной. Доклады Академии наук СССР. – 1962.– С.321-324.
4. Ярмухамедов Ш.Я. Задача Коши для полигармонического уравнения. Доклады РАН, том 388. – 2003. – С.162-165.
5. Ярмухамедов Ш.Я. Жураева Н.Ю. Задача Коши для полигармонических функций. Дифференциальные уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики. Труды международной научной конференции. – Ташкент 16-19 ноября 2004. – С.301-302.
6. Ашурова З. Теоремы типа Фрагмента-Линделефа для гармонических функций многих переменных. ДАН УзССР 1990. №5. – С.6-8.

7. Ашурова З.Р., Жураева Н.Ю., Жураева У.Ю. О некоторых свойствах ядро Ярмухамедова. International Journal of Innovative Research, 2021. №10. – С.84-90.

8. Ashurova Z.R., Jurayeva N.YU., Jurayeva U.Yu. Growing Polyharmonic functions and Cauchy problem. Journal of Critical Reviews, India, 2020 ,7, С.371–378.

9. Ashurova Z.R., Jurayeva N.Yu., Jurayeva U.Yu. Task Cauchy and Carleman function, Academicia: An International Multidisciplinary Research Journal Affiliated to Kurukshetra University. – Kurukshetra India, 2020. №10. – С.371-378.

10. Ашурова З.Р., Жураева Н.Ю., Жураева У.Ю. «Функция Карлемана для полигар монических функций определенных в некоторых областей лежащих в некоторых четном n-мерном евклидовом пространстве». Операторные алгебры и смежные проблемы журнал. – 2012. С.100-101.

11. Ашурова З.Р., Жураева Н.Ю., Жураева У.Ю. «Функция Карлемана для полигар монических функций определенных в некоторых областей лежащих в некоторых четном n-мерном евклидовом пространстве». Операторные алгебры и смежные проблемы журнал. – 2012. – С.100-101.

12. Juraeva N.Yu. Growing polyharmonic functions and task Cauchy of some class. //Узбекский математический журнал. 2009. №.2. С.70-74.

13. Жураева Н.Ю. Об интегральном представлении полигармонических функций. – Ташкент. ДАН РУЗ. – 2008. № 3. – С. 18-20.

14. Жураева Н.Ю., Жураева У.Ю., Саидов У.М. Функция Карлемана для полигармонических функций для некоторых областей лежащих в m-мерном четном евклидовом пространстве. //Uzbek Mathematical Journal, 2011, №3. – С. 92-97.

15. Жураева У.Ю. Теоремы типа Фрагмента-Линделефа для бигармонических функций многих переменных. //Известия вузов. Математика 2022. №10. –С. 42-65.

16. Jurayeva U.Yu. The Phragmen-Lindelof type theorems. //Uzbek Mathematical Journal, 2022. Volume 66, Issue 3. – P 54-61.

Зебинисо Рахимовна Ашурова
Доцент кафедры Точных наук, Узбекско-Финский педагогический институт, Самарканд, Узбекистан
zeb1957niso@gmail.com

Умидахон Юнусалиевна Жураева

ISSN: 2992-9210

Докторант кафедры Дифференциального уравнения, СамГУ им. Ш.Рашидова, Самарканд, Узбекистан
umida_9202@mail.ru

Фируза Уткуржоновна Маллаева
Студент 1 курса Математического факультета, СамГУ им. Ш.Рашидова, Самарканд, Узбекистан