ISSN: 2992-9210

BIGARMONIK TO‘RADAGI OPERATOR SPEKTRI
СПЕКТР ВОЗМУЩЕННОГО БИГАРМОНИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА НА РЕШЕТКЕ
SPECTRUM OF A PERTURBED BIHARMONIC OPERATOR ON A LATTICE

Пардабаев Мардон Алмуратович

1.- *Узбекско-Финский педагогический институт, Самарканд, Узбекистан*

Annotatsiya. Ushbumaqoladauch o‘lchamli panjarada kompakt qo‘zg‘alishli diskret bigarmonikoperatoruchun quyi va yuqori bo‘sag‘a konstantalari hamda muhim spektrdan tashqarida xos qiymati mavjudligi ko‘rsatilgan. Bundan tashqari uch o‘lchamli panjarada ushbu

$$\widehat{\mathbf{H}}_{\mu} = \widehat{\mathbf{\Delta}}\widehat{\mathbf{\Delta}} - \mu\widehat{\mathbf{V}}\,, \qquad \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}$$

operator xos qiymati uchun muhim spektrning o‘ng va chap chekkasi atrofida yaqinlashuvchi asimptotik yoyilmalar olingan hamda uch o‘lchamli panjarada bo‘sag‘a rezonanslar va bo‘sag‘a xos qiymatlar tadqiq qilingan.

Kalit so‘zlar. *Diskret bigarmonik operator, diskret Shredinger operatori, muhim spektr, xos qiymat, yoyilma, asimptotiklar.*

Пардабаев Мардон Алмуратович
Доцент кафедры математики и информатики, Узбекско-Финский педагогический институт, Самарканд, Узбекистан
p_mardon75@mail.ru

Аннотация. В этой статье показано, что для дискретного бигармонического оператора с компактным возмущением на трехмерной решетке существуют нижние и верхние пороговые константы. Кроме того получены сходящиеся асимптотические разложения собственного значения этого

$$\widehat{\mathbf{H}}_{\mu} = \widehat{\mathbf{\Delta}}\widehat{\mathbf{\Delta}} - \mu\widehat{\mathbf{V}}\,, \qquad \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}$$

оператора в окрестностях левого и правого краев существенного спектра, а также исследованы пороговые резонансы и пороговые собственные значения для трехмерной решетки.

Ключевые слова. *Дискретный бигармонический оператор, дискретный оператор Шредингера, существенный спектр, собственное значение, разложение, асимптотика.*

Abstract. This article considers that for a discrete biharmonic operator with a compact perturbation on a three-dimensional lattice, there are lower and upper threshold constants. In addition, convergent asymptotic expansions of the eigenvalue of this

$$\widehat{\mathbf{H}}_{\mu} = \widehat{\mathbf{\Delta}}\widehat{\mathbf{\Delta}} - \mu\widehat{\mathbf{V}}\,, \qquad \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}$$

operator in the vicinity of the left and right edges of the essential spectrum, and threshold resonances and threshold eigenvalues for a three-dimensional lattice are also studied.

Keywords. *Discrete biharmonic operator, discrete Schrodinger operator, essential spectrum, eigenvalue, expansion, asymptotics.*

ВВЕДЕНИЕ

В многочисленных научно-практических исследованиях, проводимых по всему миру, часто рассматривают научные модели процессов, происходящих в микромире. Развитие теории квантовых полей, описывающих явления микромира, являлось основой возникновения квантовой механики. Одной из важнейших физических величин в любой системе квантовой

ISSN: 2992-9210

механики является энергия. Анализ спектральных свойств оператора, описывающего энергию, т. е. оператора типа Шредингера, является одной из основных задач квантовой механики. Кроме того, эллиптические операторы четвертого порядка, в частности бигармонические операторы, играют центральную роль в широком классе физических моделей, таких как линейная теория упругости, проблемы жесткости (например, строительство подвесных мостов) и при формулировке потоков Стокса (см., например, [6]). Поэтому развитие исследований дискретных и существенных спектров бигармонических операторов, встречающихся в физике твердого тела, квантовой механике и теории упругости, остается важной задачей.

Недавние исследования показали (см., например, [10]), что операторы Лапласа и бигармонические операторы обладают высоким потенциалом при сжатии изображений с оптимизированными и достаточно разреженными сохраненными данными и проблемах стойкости теории упругости. Необходимость соответствующего численного моделирования привела к появлению работ (см., например, [4,7]) посвященных разнообразным дискретным приближениям к решениям уравнений четвертого порядка. Вопрос об устойчивости таких моделей в основном связан с их спектральными свойствами, и поэтому численной оценке собственных значений посвящены многочисленные исследования (см., например, [3,18])

Решетчатые операторы Шредингера, в частности решетчатые модели Бозе-Хаббарда, стали более популярными в последние годы, поскольку они представляют собой естественный гамильтониан в теории ультрахолодных атомов на оптических решетках (см., например, [8]). В отличие от традиционных систем физики твердого тела, где стабильные составные объекты обычно образуются силами притяжения и где силы отталкивания разделяют частицы в свободном пространстве, управляемость столкновительных свойств ультрахолодных атомов позволила экспериментально наблюдать стабильную отталкивающую связанную пару ультрахолодных атомов на оптической решетке $\mathbb{Z}^3$ (см., например, [9,16,17]). Во всех этих наблюдениях решетчатые операторы Шредингера стали связующим звеном между теоретической базой и экспериментальными результатами.

В непрерывном случае М.Клаус и Б.Саймон (см., например, [11,12]) получили асимптотические разложения в нижней части существенного спектра для собственного значения оператора Шредингера $-d^2/dx^2+\lambda V$ в $\mathbb{R}$ для $\lambda>0$ и V, удовлетворяющих этому неравенству

$$\int_{\mathbb{R}}(1+|x|)\,|V(x)|\mathrm{d}x<\infty.$$

В отличие от непрерывного случая управляемость параметров в решетчатых операторах Шредингера позволяет явно вычислять пороги констант связи, тем самым устанавливая существование этого явления. Получено сходящиеся разложения единственного собственного значения

ISSN: 2992-9210

двухчастичного оператора Шредингера на решетке $\mathbb{Z}^d, d \geq 1$, в левом краю существенного спектра, когда константа связи стремится к пороговому значению (см., например, [13,14,15]).

Постановка задачи и спектр дискретного билапласиана

Пусть $\mathbb{Z}^3$ - трехмерная решетка, а $\ell^2(\mathbb{Z}^3)$ - гильбертово пространство квадратично-суммируемых функций на $\mathbb{Z}^3$. Рассмотрим семейство самосопряженных ограниченных дискретных операторов

$$\widehat{\mathbf{H}}_\mu = \widehat{\mathbf{H}}_\mathbf{0} - \mu\widehat{\mathbf{V}}, \qquad \boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0},$$

в $\ell^2(\mathbb{Z}^3)$. Здесь $\widehat{\mathbf{H}}_\mathbf{0} = \widehat{\mathbf{\Delta}}\widehat{\mathbf{\Delta}}$ - дискретный билапласиан, где

$$\widehat{\mathbf{\Delta}}\hat{f}(x) = \frac{1}{2}\sum_{|s|=1}\left[\hat{f}(x) - \hat{f}(x+s)\right], \qquad \hat{f} \in \ell^2(\mathbb{Z}^3),$$

- дискретный лапласиан, а $\widehat{\mathbf{V}}$ - оператор ранга один, который задаётся как

$$\widehat{\mathbf{V}}\hat{f}(x) = \hat{\boldsymbol{v}}(x)\sum_{y\in\mathbb{Z}^3}\hat{\boldsymbol{v}}(y)\hat{\boldsymbol{f}}(y),$$

где $\hat{\boldsymbol{v}} \in \ell^2(\mathbb{Z}^3)\backslash\{0\}$ - заданная вещественнозначная функция.

Пусть $\mathbb{T}^3$- трехмерный тор, а $L^2(\mathbb{T}^3)$- гильбертово пространство функций, квадратично-интегрируемых на $\mathbb{T}^3$.

Далее мы всегда предполагаем, преобразование Фурье

$$v(p) := \mathcal{F}\hat{v}(p) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\sum_{x\in\mathbb{Z}^3}\hat{v}\,(x)e^{ix\cdot p}$$

функция $\hat{v}$ удовлетворяют следующим предположениям:

a) функция $v(p)$-вещественно-аналитическая на $\mathbb{T}^3$;

b) существуют неотрицательные целые числа $n^o, n_o \geq 0$ такие, что

$$D^{2n_0}|v(\mathbf{0})|^2 \neq 0\,,\ D^{2j}|v(\mathbf{0})|^2 = 0 \ \text{ для } \ j = 0, \dots, n_0 - 1 \quad (1)$$

$$D^{2n^o}|v(\vec{\pi})|^2 \neq 0,\ D^{2j}|v(\vec{\pi})|^2 = 0 \ \text{ для } \ j = 0, \dots,, n^o - 1 \quad (2)$$

здесь $D^jf(p)$- дифференциал j -го порядка для f в точке p,

$$D^jf(p)[\underbrace{w,w,w}_{j-\text{раз}}] = \sum_{i_1+i_2+i_3=j, i_k\geq 0}\frac{\partial^j f(p)}{\partial^{i_1}p_1\partial^{i_2}p_2\partial^{i_3}p_3}w_1^{i_1}w_2^{i_2}w_3^{i_3},$$

$w = (w_1, \dots, w_{d3}) \in \mathbb{R}^3, \mathbf{0} = (0,0,0) \in \mathbb{T}^3$ и $\vec{\pi} = (\pi,\pi,\pi) \in \mathbb{T}^3$.

Напомним, что

$$\sigma(\widehat{\mathbf{\Delta}}) = \sigma_{ess}(\widehat{\mathbf{\Delta}}) = [0,6]$$

(см., например, [1]). Следовательно,

$$\sigma(\widehat{\mathbf{H}}_0) = \sigma_{ess}(\widehat{\mathbf{H}}_0) = [0,36]$$

а в силу компактности оператора $\widehat{\mathbf{V}}$ и теоремы Вейля о сохранении существенного спектра при компактных возмущениях

$$\sigma_{ess}(\widehat{\mathbf{H}}_\mu) = \sigma_{ess}(\widehat{\mathbf{H}}_0) = [0,36]$$

для любого $\mu \in \mathbb{R}$.

ISSN: 2992-9210

Прежде чем изложить основные результаты, введем следующие обозначения

$$\mu_o := \left(\int_{\mathbb{T}^3} \frac{|v(q)|^2 \mathrm{d}q}{\varepsilon(q)}\right)^{-1}, \qquad \mu^o := -\left(\int_{\mathbb{T}^3} \frac{|v(q)|^2 \mathrm{d}q}{36-\varepsilon(q)}\right)^{-1} \quad (3)$$

$$\hat{c}_v := \int_{\mathbb{T}^3} \frac{|v(q)|^2 \mathrm{d}q}{\varepsilon(q)^2}, \qquad \hat{C}_v := \int_{\mathbb{T}^3} \frac{|v(q)|^2 \mathrm{d}q}{\left(36-\varepsilon(q)\right)^2} \quad (4)$$

и

$$c_v := \frac{2^{2n_o+3}}{(2n_o)!} \int_{\mathbb{S}^2} D^{2n_o} |v(\mathbf{0})|^2 [w,w] \mathrm{d}\mathcal{H}^2\,(w), \quad (5)$$

$$C_v := \frac{2^{2n^o+2}}{(24)^{n^o+3/2}(2n^o)!} \int_{\mathbb{S}^2} D^{2n^o} |v(\vec{\pi})|^2 [w,w] \mathrm{d}\mathcal{H}^2\,(w), \quad (6)$$

где $\mathbb{S}^2$- единичная сфера в $\mathbb{R}^3$ и

$$\varepsilon(q) \coloneqq ((1-\cos q_1)+(1-\cos q_2)+(1-\cos q_3))^2.$$

Следующая теорема устанавливает существование и единственность собственного значения оператора $\widehat{\mathbf{H}}_\mu$

Теорема 1.*Пусть* $\mu_o \geq 0$, $\mu^o \leq 0$ *задано как* (3). *Тогда* $\sigma_{disc}\left(\widehat{\mathbf{H}}_\mu\right) = \emptyset$ *для любых* $\mu \in [\mu^o, \mu_o]$ *и* $\sigma_{disc}\left(\widehat{\mathbf{H}}_\mu\right)$ *является одноэлементным* $\{e(\mu)\}$ *для любого* $\mu \in \mathbb{R} \setminus [\mu^o, \mu_o]$. *Более того, собственная функция* $\hat{f}_\mu$*соответствующая собственному значению*$e(\mu)$, *задается как* $\hat{f}_\mu := \mathcal{F}^{-1} f_\mu$, *где*

$$f_\mu(p) = \frac{v(p)}{\varepsilon(p) - e(\mu)}.$$

Кроме того,

- *если* $\mu < \mu^o$ *(соотв.* $\mu > \mu_o$*), то* $e(\mu) > 36$ *(соотв.* $e(\mu) < 0$*);*
- *функция* $\mu \in \mathbb{R} \setminus [\mu^o, \mu_o] \mapsto e(\mu)$ *вещественно-аналитическая, строго убывающая, выпуклая в* $(-\infty, \mu^o)$ *и вогнутая в* $(\mu_o, +\infty)$, *и удовлетворяет*

$$\lim_{\mu \searrow \mu_o} e(\mu) = 0, \quad \lim_{\mu \nearrow \mu^o} e(\mu) = 36 \quad \text{и} \quad \lim_{\mu \to \pm\infty} \frac{e(\mu)}{\mu} = -\int_{\mathbb{T}^3} |v(q)|^2 \,\mathrm{d}q.$$

Далее мы исследуем пороговые резонансы оператора $\widehat{\mathbf{H}}_\mu$.

Теорема 2. *Пусть*$n_o, n^o \geq 0$*задается как* (1)-(2).

ISSN: 2992-9210

(a) *Пусть* $n_o \geq 1$. *Уравнение* $\widehat{\mathbf{H}}_{\mu_o}\hat{f} = 0$ *имеет ненулевые решение* $\hat{f} := \mathcal{F}^{-1}f \in c_0(\mathbb{Z}^3)$, *где* $f(p) = \frac{v(p)}{\varepsilon(p)} \in L^1(\mathbb{T}^3)$. *Кроме того,* $\hat{f} \in c_0(\mathbb{Z}^3) \setminus \ell^2(\mathbb{Z}^3)$ *для* $n_o \in \{1,2\}$; $\hat{f} \in \ell^2(\mathbb{Z}^3)$ *для* $n_o \geq 3$.

(b) *Пусть* $n^o \geq 0$.*Уравнение* $\widehat{\mathbf{H}}_{\mu^o}\hat{g} = 36\hat{g}$ *имеет ненулевые решение* $\hat{g} := \mathcal{F}^{-1}g \in c_0(\mathbb{Z}^3)$, *где* $g(p) = \frac{v(p)}{36-\varepsilon(p)} \in L^1(\mathbb{T}^3)$. *Кроме того,* $\hat{g} \in c^0(\mathbb{Z}^3) \setminus \ell^2(\mathbb{Z}^3)$ *для* $n^o = 1$ *и* $\hat{g} \in \ell^2(\mathbb{Z}^3)$ *для* $n^o > 1$.

Напомним, что в литературах [1,2] ненулевые решения уравнений $\widehat{\mathbf{H}}_\mu\hat{f} = 0$ и $\widehat{\mathbf{H}}_\mu\hat{g} = 4d^2\hat{g}$, не принадлежащие в $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$, называются резонансными состояниями.

Теперь мы исследуем скорость сходимости собственного значения $e(\mu)$к краю существенного спектра.

Теорема 3. *Если* $\mu > \mu_o$, *тогда оператор* $\widehat{\mathbf{H}}_\mu$ *имеет единственное собственное значение* $e(\mu) < 0$.

Предположим:

(1) если $n_o = 0$, *то* $\mu_o = 0$ *и для достаточно малых и положительных* μ, *имеет место равенство*

$$\left(-\,e(\mu)\right)^{1/4} = \left\{\frac{\pi c_v}{8}\mu + \sum_{n\geq 1} c_{1,n}\mu^{n+1},\right.$$

где $\{c_{1,n}\}$ - *некоторые действительные коэффициенты;*

(2)если $n_o = 1{,}2$, *то* $\mu_o > 0$ *и для достаточно малых и положительных* $\mu - \mu_o$, *верно*

$$\left(-\,e(\mu)\right)^{1/4} = \begin{cases} \dfrac{8}{\pi c_v \mu_o^2}(\mu-\mu_o) + \sum\limits_{n\geq 1} c_{2,n}(\mu-\mu_o)^{n+1}, & n_o = 1 \\ \left(\dfrac{8}{\pi c_v \mu_o^2}\right)^{1/3}(\mu-\mu_o)^{1/3} + \sum\limits_{n\geq 1} c_{3,n}(\mu-\mu_o)^{\frac{n+1}{3}}, & n_o = 2, \end{cases}$$

где $\{c_{2,n}\}$ *и* $\{c_{3,n}\}$ - *некоторые действительные коэффициенты;*

(3)если $n_o \geq 3$, *то* $\mu_o > 0$ *и для достаточно малых и положительных* $\mu - \mu_o$, *имеет место разложение*

$$\left(-\,e(\mu)\right)^{1/4} = (\hat{c}_v\mu_o^2)^{-1/4}(\mu-\mu_o)^{1/4} + \sum_{n\geq 2} c_{4,n}(\mu-\mu_o)^{\frac{n}{4}},$$

где $\{c_{4,n}\}$ - *некоторые действительные коэффициенты.*

Здесь $c_v > 0$ и $\hat{c}_v > 0$определяются по формулам (4) и (5) соответственно.

Теорема 4. *Если* $\mu > \mu_o$, *то для собственного значения* $e(\mu)$*оператора* $\widehat{\mathbf{H}}_\mu$ *верно следующие асимптотики*

- если$n_o = 0$,то$\mu_o = 0$

ISSN: 2992-9210

$$e(\mu) = -(\frac{\pi c_v}{8})^4 \mu^4 + o(\mu^4), \quad \mu \to 0;$$

- если$n_o = 1$,то$\mu_o > 0$

$$e(\mu) = -(\frac{8}{\pi c_v \mu_o^2})^4 (\mu - \mu_o)^4 + o((\mu - \mu_o)^4), \quad \mu \to \mu_o;$$

- если$n_o = 2$,то$\mu_o > 0$

$$e(\mu) = -(\frac{8}{\pi c_v \mu_o^2})^{4/3} (\mu - \mu_o)^{4/3} + o\big((\mu - \mu_o)^{4/3}\big), \quad \mu \to \mu_o;$$

- если$n_o \geq 3$,то$\mu_o > 0$

$$e(\mu) = -(\mu_o^2 \hat{c}_v)^{-1} (\mu - \mu_o) + o(\mu - \mu_o), \quad \mu \to \mu_o;$$

Здесь $c_v > 0$ и $\hat{c}_v > 0$определяются по формулам (4) и (5) соответственно.

Теорема 5.*Если* $\mu < \mu^o$, *тогда оператор* $\widehat{\mathbf{H}}_\mu$ *имеет единственное собственное значение* $e(\mu) > 36$.

Предположим:

(1) если $n^o = 0$, *то* $\mu^o < 0$ *и для достаточно малых и положительных* $\mu^o - \mu$ *, верно*

$$(e(\mu) - 36)^{1/2} = \left(\pi\, C_v {\mu^o}^2\right)^{-1} (\mu^o - \mu) + \sum_{n \geq 1} C_{1,n} (\mu^o - \mu)^{n+1},$$

где $\{C_{1,n}\}$ *- некоторые действительные коэффициенты;*

(2) если $n^o \geq 1$, *то* $\mu^o < 0$ *и для достаточно малых и положительных* $\mu^o - \mu$ *, верно*

$$(e(\mu) - 36)^{1/2} = \left(\hat{C}_v {\mu^o}^2\right)^{-1/2} (\mu^o - \mu)^{1/2} + \sum_{n \geq 1} C_{2,n} (\mu^o - \mu)^{(n+1)/2},$$

где $\{C_{2,n}\}$ *- некоторые действительные коэффициенты.*

Здесь C_vи $\hat{C}_v$ задаются как (4) и (6), соответственно.

Литература

[1] S. Albeverio, S. Lakaev, Z. Muminov: Schrödinger operators on lattices. The Efimov effect and discrete spectrum asymptotics. Ann. Inst. H. Poincar'e Phys. Theor. **5** (2004), 743-772.

[2] S. Albeverio, S. Lakaev, K. Makarov, Z. Muminov: The threshold effects for the two-particle Hamiltonians on lattices. Commun. Math. Phys. **262** (2006), 91-115.

[3] A. Andrew, J. Paine: Correction of finite element estimates for Sturm-Liouville eigenvalues. Numer. Math. **50** (1986), 205-215.

[4] M. Ben-Artzi, G. Katriel: Spline functions, the biharmonic operator and approximate eigenvalues. Numer. Math. **141** (2019), 839-879.

ISSN: 2992-9210
[5] A. Boumenir: Sampling for the fourth-order Sturm-Liouville differential operator. J. Math. Anal. Appl.**278** (2003), 542-550.
[6] S. Dipierro, A. Karakhanyan, E. Valdinoci: A free boundary problem driven by the biharmonic operator. arXiv:1808.07696v2 [math.AP].
[7] J. Graef, Sh. Heidarkhani, L. Kong, M. Wang: Existence of solutions to a discrete fourth order boundary value problem. J. Difference Equ. Appl. **24** (2018), 849-858.
[8] D. Jaksch, C. Bruder, J. Cirac, C.W. Gardiner, P. Zoller: Cold bosonic atoms in optical lattices. Phys. Rev. Lett. **81** (1998), 3108-3111.
[9] M.-S. Heo, T.T. Wang, C.A. Christensen, T.M. Rvachov, D.A. Cotta, J.-H. Choi, Y.-R. Lee, W. Ketterle: Formation of ultracold fermionic NaLi Feshbach molecules. Phys. Rev. A **86** (2012), 021602.
[10] S. Hoffmann, G. Plonka, J. Weickert: Discrete green's functions for harmonic and biharmonic inpainting with sparse atoms. X. Tai Energy Minimization Methods in Computer Vision and Pattern Recognition. EMMCVPR 2015. Lecture Notes in Computer Science, vol 8932 (2015). Springer, Cham.
[11] M. Klaus: On the bound states of Schrödinger operators in one dimension. Ann. Phys. **108** (1977), 288-300.
[12] M. Klaus, B. Simon: Coupling constant thresholds in nonrelativistic Quantum Mechanics. I. Short-range two-body case. Ann. Phys. **130** (1980), 251-281.
[13] S.N. Lakaev, A.M. Khalkhuzhaev, Sh.S. Lakaev: Asymptotic behavior of an eigenvalue of the two-particle discrete Schrödinger operator. Theoret. and Math. Phys. **171** (2012), 800-811.
[14] S.N. Lakaev, Sh.Yu. Kholmatov: Asymptotics of the eigenvalues of a discrete Schrödinger operator with zero-range potential. Izvestiya Math. **76** (2012), 946-966.
[15] S.N. Lakaev, Sh.Yu. Kholmatov: Asymptotics of eigenvalues of two-particle Schrödinger operators on lattices with zero-range interaction. J. Phys. A: Math. Theor. **44** (2011).
[16] C. Ospelkaus, S. Ospelkaus, L. Humbert, P. Ernst, K. Sengstock, K. Bongs: Ultracold heteronuclear molecules in a 3d optical lattice. Phys. Rev. Lett. **97**(2006).
[17] K. Winkler, G. Thalhammer, F. Lang, R. Grimm, J. Hecker Denschlag, A.J. Daley, A. Kantian, H.P. B\"uchler, P. Zoller: Repulsively bound atom pairs in an optical lattice. Nature **441** (2006), 853-856.
[18] A. Khalkhuzhaev, Sh.Kholmatov, M.Pardabaev: Expansion of eigenvalues of the perturbed discrete bilaplacian. Journals Monatshefte fur Mathematik, (2022)
[19] A. Khalkhuzhaev, M.Pardabaev: Asymptotics of eigenvalues of perturbed bilaplacian in the 1D lattice. Uzbek Mathematical Journal. – Tashkent, 2021, -№4. -P.62-78.
[20] M.Pardabaev: Some applications of implicit function theorem. Scientific journal of Samarkand University. – Samarkand, 2021. – №5. P.44-52.